EULER (V 3.0)

Prof. José Fager
Montevideo julio de 2019

Leonhard Euler

“(Basilea, Suiza, 15 de abril de 1707 - San Petersburgo, Rusia, 18 de septiembre de 1783), conocido como Leonhard Euler, fue un matemático y físico suizo. Se trata del principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos…”

Tomado de https://es.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Si bien es común pronunciar “éuler” tal cual se lee en castellano, en alemán se pronuncia: “óila” (https://es.forvo.com/word/leonhard_euler/).

Grafo euleriano

Problema del sobre abierto

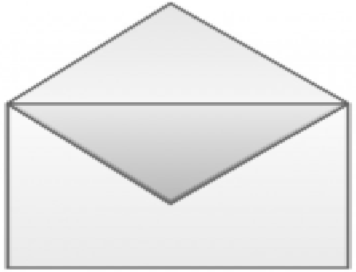
- Se quiere dibujar un sobre abierto como el de la figura, sin levantar el lápiz del papel ni pasar más de una vez por la misma línea.

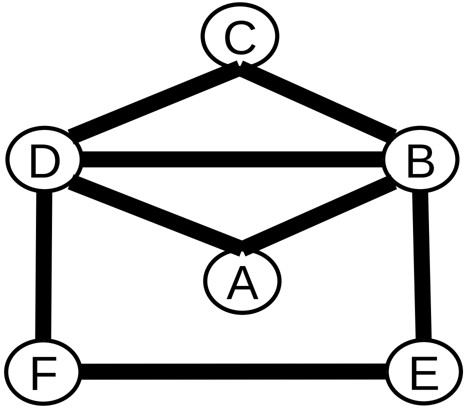
- Esto se puede modelar como un grafo, donde los nodos son los vértices del sobre y las aristas son las líneas del sobre.

- La solución es ***encontrar un ciclo*** que pasa por todas las aristas sin repetir arista (si se puede repetir vértice).

- Una posible solución es el ciclo: A, B, C, D, B, E, F, D, A.

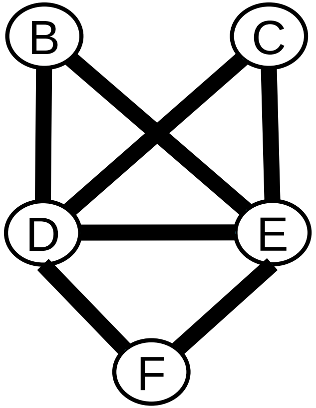
- Al ciclo anterior se lo llama "ciclo euleriano", los grafos que tienen "ciclo euleriano" son llamados "grafos eulerianos".





Ciclo euleriano

- Es un ciclo en un grafo conexo que recorre todas las aristas del grafo exactamente una vez.



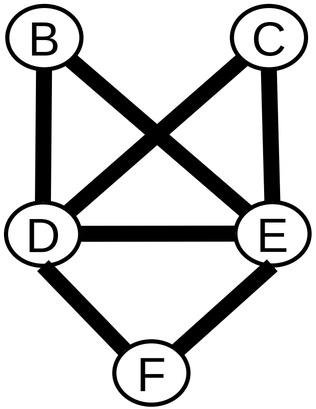
En el grafo de la imagen un ciclo euleriano es:
F, D, B, E, D, C, E, F

La solución al “problema del sobre abierto” es un ciclo euleriano.

Un ciclo euleriano no repite arista, pero si puede repetir vértice.

Grafo euleriano

- Es un grafo que tiene un “ciclo euleriano”.



El grafo de la imagen es un grafo euleriano. Pues ya vimos que tiene por lo menos un ciclo euleriano.

¿Cuando un grafo es euleriano?

- **Enunciado I**

  Un grafo conexo tiene un “ciclo euleriano” si y solo si todos sus vértices tienen grado de entrada par.

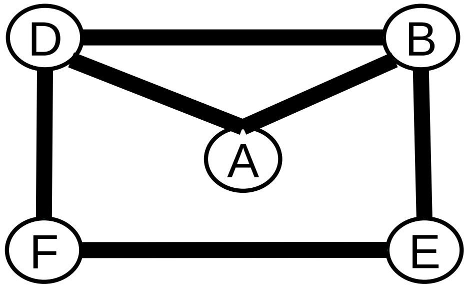
- **Corolario I**

  Si un grafo conexo cumple el “Enunciado I” entonces es un “grafo euleriano”.

Grafo semi-euleriano

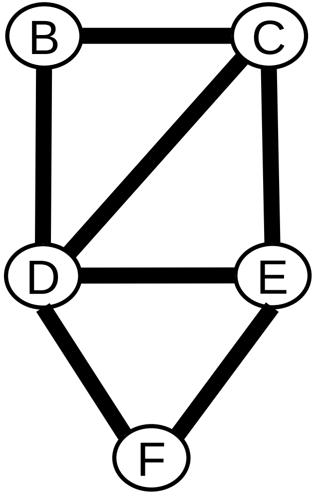
Problema del sobre cerrado

- Se quiere dibujar un sobre cerrado como el de la figura, sin levantar el lápiz del papel ni pasar más de una vez por la misma línea.
- Esto se puede modelar como un grafo, donde los nodos son los vértices del sobre y las aristas son las líneas del sobre.
- La solución es ***encontrar un camino*** que pasa por todas las aristas sin repetir arista (si se puede repetir vértice).
- Una posible solución es el camino: B, D, A, B, E, F, D.
- Al camino anterior se lo llama "camino euleriano", los grafos que tienen "camino euleriano" pero no un "ciclo euleriano" son llamados "grafos semi-eulerianos".



Camino euleriano

- Es un camino en un grafo conexo que recorre todas las aristas exactamente una vez.



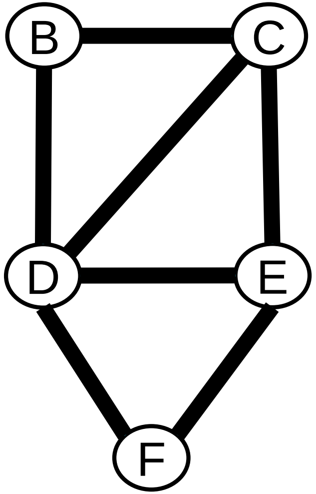
En el grafo de la imagen un camino euleriano es: C, B, D, C, E, F, D, E.

La solución al “problema del sobre cerrado” es un camino euleriano.

Un camino euleriano no repite arista, pero si puede repetir vértice.

Grafo semi-euleriano

- Es un grafo que tiene un “camino euleriano” pero no un “ciclo euleriano”.



El grafo de la imagen un grafo semi-euleriano.

¿Cuándo un grafo es semi-euleriano?

- **Enunciado II**

  Un grafo conexo tiene un “camino euleriano” y no un “ciclo euleriano” si y solo si tiene exactamente dos vértices de grado de entrada impar.

- **Corolario II**

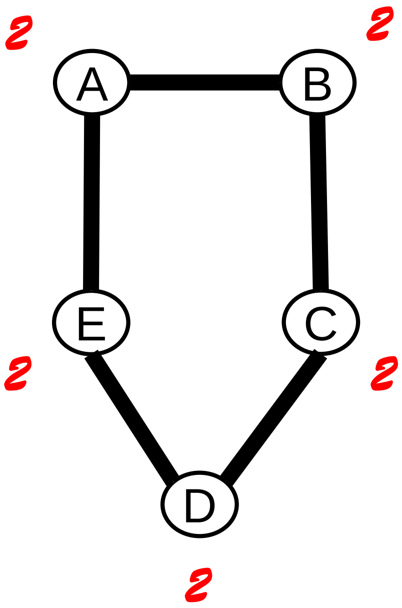
  Si un grafo conexo cumple el “Enunciado II” entonces es un “grafo semi-euleriano”.

¿Cómo encontrar un camino euleriano?

- Los caminos eulerianos de existir, empiezan en uno de los dos vértices con grado impar y terminan en el otro vértice de grado impar.
- No veremos la demostración de la afirmación anterior.

Ejemplos

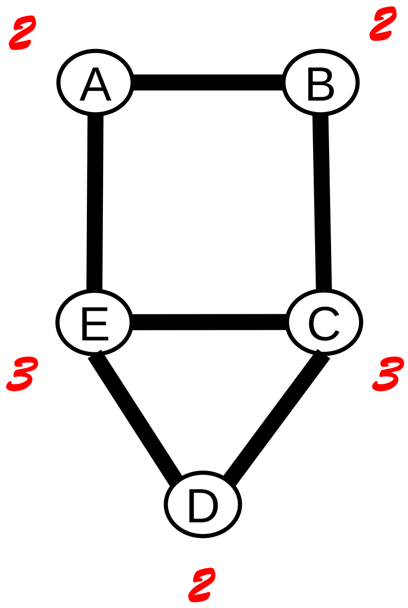
Ejemplo 1



Todos los vértices tienen grado par por lo tanto tiene un ciclo euleriano y el grafo es euleriano (“enunciado I”).

Un posible ciclo euleriano es: A, B, C, D, E.

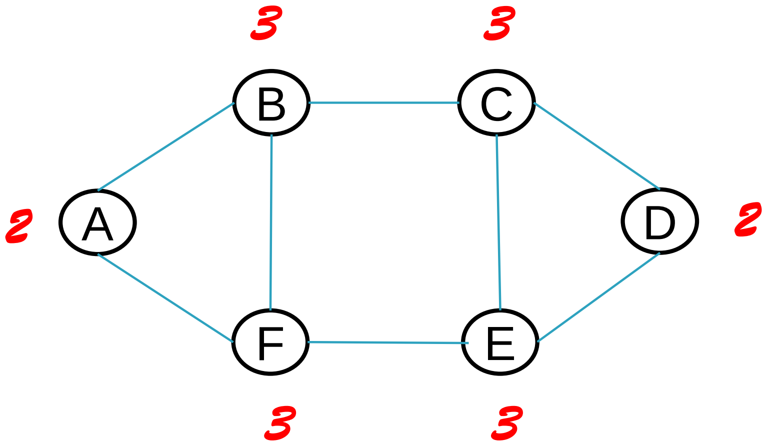
Ejemplo 2



Solo los vértices E y C tienen grado impar por lo tanto por “enunciado II” tiene un camino euleriano, no tiene un ciclo euleriano y el grafo es semi-euleriano.

Un posible camino euleriano es: E, A, B, C, D, E, C.

Ejemplo 3



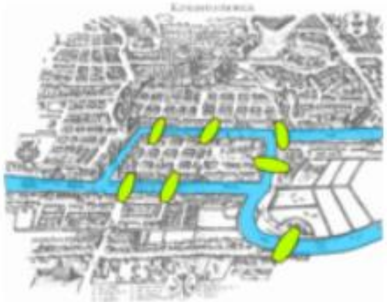
Por no tener todos los vértices grado par no se puede aplicar el “enunciado I,” al tener más de dos vértices grado impar tampoco se puede aplicar el “enunciado II”, por lo tanto no tiene ni camino ni ciclo euleriano y el grafo no es ni euleriano, ni semi-euleriano.

Problema de los puentes de Königsberg

(problema original de Euler)

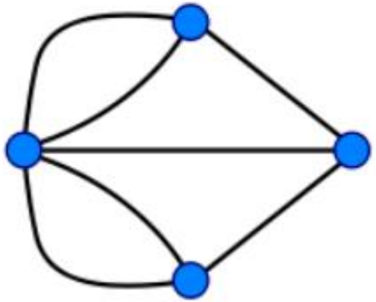
Enunciado del problema

- Dado el mapa de Königsberg, con el río Pregolya dividiendo el plano en cuatro regiones distintas, que están unidas a través de los siete puentes, ¿es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes, recorriendo sólo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida?



Mapa de Königsberg original.

Mapa de Königsberg esquematizado.



Mapa de Königsberg modelado con un grafo.

http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_los_puentes_de_K%C3%B6nigsberg

Historia de la solución

- La respuesta es negativa, es decir, no existe una ruta con estas características. El problema puede resolverse aplicando un método de fuerza bruta, lo que implica probar todos los posibles recorridos existentes. Sin embargo, Euler en 1736 en su publicación *«Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis»*[1] demuestra una solución generalizada del problema, que puede aplicarse a cualquier territorio en que ciertos accesos estén restringidos a ciertas conexiones, tales como los puentes de Königsberg.

http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_los_puentes_de_K%C3%B6nigsberg

Solución

- Euler determinó, en el contexto del problema, que los puntos intermedios de un recorrido posible necesariamente han de estar conectados a un número par de líneas. En efecto, si llegamos a un punto desde alguna línea, entonces el único modo de salir de ese punto es por una línea diferente. Esto significa que tanto el punto inicial como el final serían los únicos que podrían estar conectados con un número impar de líneas. Sin embargo, el requisito adicional del problema dice que el punto inicial debe ser igual al final, por lo que no podría existir ningún punto conectado con un número impar de líneas.

- En particular, como en este diagrama los cuatro puntos poseen un número impar de líneas incidentes (tres de ellos inciden en tres líneas, y el restante incide en cinco), entonces se concluye que es imposible definir un camino con las características buscadas.

http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_los_puentes_de_K%C3%B6nigsberg